Chapitre 1

Ensembles

Toute personne ayant une activité mathématique manipule des ensembles. À la base, la notion naïve d'ensemble (celle que le mathématicien standard utilise tous les jours) n'est qu'un moyen de classer des objets ou de les regrouper selon des propriétés communes. C'est une notion intuitive, c'est-à-dire que l'on emploie sans forcément en avoir donné une définition précise, accompagnée d'un vocabulaire (parties, appartenir, intersection, etc.) et de propriétés le plus souvent justifiées seulement par le bon sens mais dont tout le monde est d'accord pour dire qu'elles sont vraies (tout au moins tant qu'on évite les problèmes techniques de la théorie des ensembles). Ces propriétés ont en grande partie été introduites dans le tome de *Mathématiques L1*, chez le même éditeur. L'objet de cette section est de rappeler et compléter certaines d'entre elles.

I. Rappels et quelques compléments

Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils possèdent exactement les mêmes éléments (nous verrons plus tard que c'est l'un des principaux axiomes de la théorie des ensembles). Par exemple, les ensembles $\{2, 3, 5, 7\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 10$ et n est premier$\}$ sont égaux. D'autre part (et ce sera aussi un axiome), il existe un ensemble qui ne contient aucun élément, noté $\varnothing$ (ou $\{\}$).

On dit que A est inclus dans B, ou que B contient A, et on écrit $A \subset B$ lorsque les éléments de A sont tous dans B. La relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive (c'est une relation d'ordre, comme défini dans le tome de [*Mathématiques L1*, Pearson], p. 163).

Les notions de réunions, d'intersections, de complémentaires, vues dans l'ouvrage précité (p. 142 à 146), sont supposées connues et ne seront pas rappelées ici.

I.1. Parties

Pour E ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si E est fini et possède n éléments alors $\mathscr{P}(E)$ possède 2^n éléments. Pour A et B ensembles, on a les propriétés suivantes :
1. $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$;
2. $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$;
3. si $A \subset B$ alors $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.

Remarquons que l'inclusion du point 2 n'est en général pas une égalité, comme on le voit sur le contre-exemple $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$ pour lequel $\mathscr{P}(A \cup B) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}$ et $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\big\}$.

Test 1.1.

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Combien d'éléments possède $\mathscr{P}(E)$? Les énumérer.

Test 1.2.

Déterminer $\mathscr{P}(\varnothing)$. Déterminer $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\varnothing)\big)$.

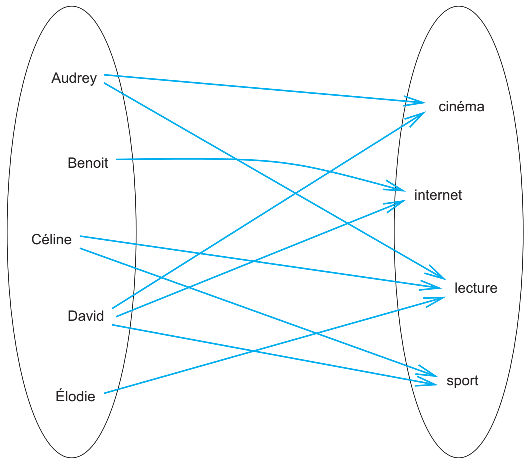

FIGURE 1.1. Diagramme de Venn d'une relation

I.2. Relations

On souhaite parfois associer des éléments d'un ensemble à des éléments d'un autre ensemble. Par exemple, A est un ensemble de personnes :

$$A = \{\text{Audrey}, \text{Benoît}, \text{Céline}, \text{David}, \text{Élodie}\}$$

et B un ensemble de loisirs :

$$B = \{\text{cinéma}, \text{internet}, \text{lecture}, \text{sport}\}.$$

Audrey aime le cinéma et la lecture, Benoît aime surfer sur internet, Céline lit beaucoup mais fait aussi du sport, David est cinéphile, passe une partie de son temps sur internet et fait du sport et Élodie consacre la plus grande partie de son temps libre à la lecture. On peut représenter tout cela sur un diagramme de Venn (voir figure 1.1).

On peut aussi donner l'ensemble des couples $(\text{personne}, \text{activité})$ décrivant ces diverses affinités :

$$\begin{aligned}\mathscr{R} = \{ & (\text{Audrey, cinéma}), (\text{Audrey, lecture}), (\text{Benoît, internet}), (\text{Céline, lecture}), (\text{Céline, sport}), \\ & (\text{David, cinéma}), (\text{David, internet}), (\text{David, sport}), (\text{Élodie, lecture})\}.\end{aligned}$$

Une telle association est mathématiquement décrite par la notion de relation.

Définition 1.1. (Relation). *Soient A et B deux ensembles. Une relation entre A et B est une partie de $A \times B$.*

Si $\mathscr{R}$ est une relation entre A et B, on dira que a est en relation avec b lorsque $(a, b) \in \mathscr{R}$. On notera souvent plus simplement $a \mathscr{R} b$. Lorsque $A = B$, nous parlerons d'une *relation binaire sur* A.

Définition 1.2. (Domaine, image). *Soient X et Y deux ensembles et $\mathscr{R}$ une relation entre X et Y. On appelle domaine de $\mathscr{R}$ l'ensemble*

$$\{x \in X \mid \exists y \in Y,\ x \mathscr{R} y\}.$$

On appelle image de $\mathscr{R}$ l'ensemble

$$\{y \in Y \mid \exists x \in X,\ x \mathscr{R} y\}.$$

Définition 1.3. (Relation induite). *Soient* $\mathscr{R}$ *une relation binaire sur un ensemble* E *et* F *une partie de* E. *On obtient une relation binaire sur* F, *provisoirement notée* $\mathscr{R}_F$, *en posant*

$$\mathscr{R}_f = \{(x, y) \in F \times F \mid x \mathscr{R} y\}.$$

Pour $x, y \in F$, *on a donc* $x \mathscr{R}_f y$ *si et seulement si* $x \mathscr{R} y$. *On appelle* $\mathscr{R}_f$ *la relation induite par* $\mathscr{R}$ *sur* F.

I.3. Fonctions

Un cas particulier de relation important est celui où, pour chaque x appartenant au domaine de $\mathscr{R}$, il n'existe qu'un seul y tel $x \mathscr{R} y$.

Définition 1.4. (Fonction, application). *Une fonction d'un ensemble* X *dans un ensemble* Y *est une relation* $\mathscr{R}$ *entre* X *et* Y *telle que, pour tout* $x \in X$, *il existe au plus un* $y \in Y$ *tel que* $x \mathscr{R} y$. *Une application d'un ensemble* X *dans un ensemble* Y *est une relation* $\mathscr{R}$ *entre* X *et* Y *telle que, pour tout* $x \in X$, *il existe exactement un* $y \in Y$ *tel que* $x \mathscr{R} y$.

Dans le cas d'une fonction ou d'une application, on utilise la notation plus commode $y = \mathscr{R}(x)$ à la place de $y \mathscr{R} x$. L'ensemble Y^X des applications de X dans Y est une partie de $\mathscr{P}(X \times Y)$ (car une relation est un élément de $\mathscr{P}(X \times Y)$).

I.4. Familles et produits

Une famille d'éléments d'un ensemble E, indexée par un ensemble I est une application de I dans E. Si $i \mapsto x_i$ est une telle application, on la notera $(x_i)_{i \in I}$. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles alors on peut définir les unions et intersections ainsi :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in X_i\} \qquad \text{et, si } I \neq \varnothing, \bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in X_i\}.$$

Quant au produit, il est défini ainsi :

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\text{familles}(x_i)_{i \in I} \text{ telles que } x_i \in X_i \text{ pour tout } i \in I\}.$$

I.5. Peut-on tout faire avec des ensembles ?

Les ensembles sont des outils universels qui permettent une formulation pratique de la plupart des problèmes mathématiques. Les mathématiciens ont donc été tentés de les utiliser sans restriction. Or, il s'avère qu'un usage sans précautions de la notion d'ensemble mène à des contradictions logiques. Le tome [*Mathématiques L1*, Pearson] de cet ouvrage cite le paradoxe de Russel, découvert en 1901, qui est la contradiction la plus connue.

Attention **Paradoxe de Russel**

L'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes,

$$Z = \{X \mid X \notin X\},$$

ne peut exister.

Test 1.3.

Expliquer pourquoi cet « ensemble » Z ne peut exister.

Ce genre de contradiction a provoqué une certaine crise mathématique au début du XX^{e} siècle et a amené la mise au point, entre 1908 et 1920, d'une théorie axiomatique complexe. Nous en donnerons les rudiments dans le chapitre suivant. Elle précise exactement ce que l'on peut ou ne peut pas faire avec les ensembles et permet d'éviter ces contradictions.

Il faut toutefois rester pragmatique. La conception naïve des ensembles, telle que vous la possédez dès à présent, suffit largement à décrire des théories mathématiques parfaitement rigoureuses, et elle est adaptée à la formulation de la quasi-totalité des problèmes mathématiques.

II. Ensembles ordonnés

Les relations d'ordre ont été introduites brièvement dans le tome *Mathématiques L1*. Elles sont l'objet central de ce chapitre. Nous reprenons donc l'étude depuis le début.

II.1. Relations d'ordre

Définition 1.5. (Relation d'ordre). *Soit E un ensemble. Une relation d'ordre sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 1.6. L'ensemble des couples

$$\{(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7),(5,5),(5,7),(7,7)\}$$

est une relation d'ordre sur l'ensemble $E=\{2,3,5,7\}$. C'est en fait la relation *induite sur* E par la relation d'ordre habituelle $\leqslant$ sur les entiers.

Définition 1.7. (Ordre total). *Une relation d'ordre notée $\leqslant$ sur E est dite d'ordre total si, pour tous $x,y\in E$, on a $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$.*

Exemple 1.8. 1. L'ordre naturel $\leqslant$ sur l'ensemble des nombres réels est une relation d'ordre total.
2. La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ est une relation d'ordre. Elle n'est pas d'ordre total.

Test 1.4.

La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre. Est-elle d'ordre total ?

Test 1.5.

Soit $\leqslant$ la relation d'ordre habituelle sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle que $f\leqslant g$ si et seulement si $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$). Est-ce une relation d'ordre total ?

Remarque. Si E est un ensemble ordonné par $\leqslant$, la notation $x<y$ signifie $x\leqslant y$ et $x\neq y$.

Attention $<$ **et** $\ngeqslant$

L'assertion $x<y$ n'est la négation de $x\geqslant y$ que dans le cas où E est totalement ordonné.

II.2. Ordres sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Un même ensemble peut en général être ordonné de plusieurs façons (être muni de plusieurs relations d'ordre). C'est en particulier le cas de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels qui possède plusieurs relations d'ordre utiles. Nous en donnons deux exemples ici dans un cadre plus général.

Définition 1.9. (Ordre produit). *Soit* E *un ensemble ordonné par* $\leqslant$. *Pour* (x, y) *et* $(x', y') \in E \times E$, *on pose*

$$(x, y) \leqslant_p (x', y') \qquad \text{si} \qquad x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

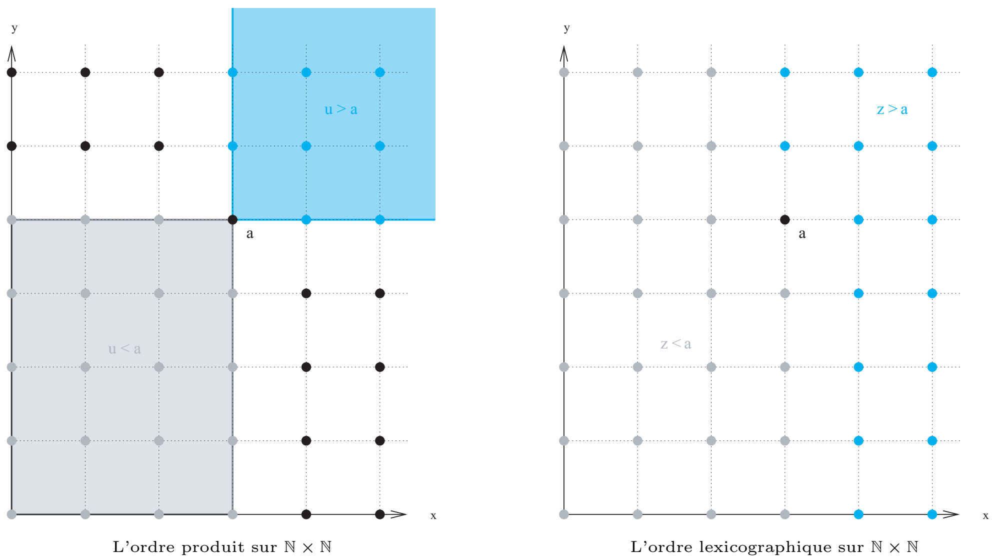

Figure 1.2. Ordres

Définition 1.10. (Ordre lexicographique). *Soit* E *un ensemble ordonné par* $\leqslant$. *Pour* (x, y) *et* $(x', y') \in E \times E$, *on pose*

$$(x, y) \leqslant_l (x', y') \qquad \text{si} \qquad x < x' \qquad \text{ou} \qquad x = x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

Remarque. L'ordre lexicographique, généralisé à des n-uplets de lettres de longueur quelconque, est celui utilisé pour classer les mots dans un dictionnaire.

Proposition 1.11. *La relation* $\leqslant_p$ *est une relation d'ordre sur* $E \times E$. *Elle n'est pas totale, sauf si* E *contient moins de deux éléments.*

Preuve. On voit facilement que $\leqslant_p$ est une relation réflexive (parce que $\leqslant$ l'est).

D'autre part, si $(x, y) \leqslant_p (x', y')$ et $(x', y') \leqslant_p (x, y)$ alors $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$ et $x' \leqslant x$ et $y' \leqslant y$. Parce que $\leqslant$ est antisymétrique, on en déduit que $x = x'$ et $y = y'$. Donc $\leqslant_p$ est antisymétrique.

Si $(x, y) \leqslant_p (x', y')$ et $(x', y') \leqslant_p (x'', y'')$ alors on obtient $x \leqslant x' \leqslant x''$ et $y \leqslant y' \leqslant y''$, donc $(x, y) \leqslant_p (x'', y'')$. La relation $\leqslant_p$ est transitive. On a montré que c'est une relation d'ordre.

Supposons que la relation $\leqslant_p$ est d'ordre total. Supposons aussi que E est non vide (s'il est vide, $E \times E$ l'est aussi et la relation $\leqslant_p$ est alors la relation vide qui est trivialement une relation d'ordre total). Soient x, y deux éléments de E. Alors on a $(x, y) \leqslant_p (y, x)$ ou $(y, x) \leqslant_p (x, y)$. Dans les deux cas, on obtient $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. Donc, $x = y$ puisque $\leqslant$ est antisymétrique. Ainsi, E ne contient au plus qu'un seul élément. ■

Proposition 1.12. *La relation $\leqslant_l$ est une relation d'ordre sur $E \times E$. Si $\leqslant$ est un ordre total sur E alors $\leqslant_l$ est un ordre total sur $E \times E$.*

Preuve. Il est clair que la relation $\leqslant_l$ est réflexive.

On remarque aussi que l'inégalité $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ implique $x \leqslant x'$. Supposons que $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ et $(x', y') \leqslant_l (x, y)$. On a dans ce cas $x \leqslant x'$ et $x' \leqslant x$ donc $x = x'$. La définition de l'ordre $\leqslant_l$ indique alors que $y \leqslant y'$ et $y' \leqslant y$ donc $y = y'$. Cela montre que la relation $\leqslant_l$ est antisymétrique.

Supposons que $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ et $(x', y') \leqslant_l (x'', y'')$. Si $x < x'$ ou $x' < x''$ alors on a $x < x''$ et donc $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$, ce qui est l'inégalité qu'on cherche à obtenir. Il reste le cas où $x = x'$ et $x' = x''$. Mais alors la définition de l'ordre $\leqslant_l$ indique que $y \leqslant y'$ et $y' \leqslant y''$, donc $y \leqslant y''$. On obtient dans ce cas aussi $(x, y) \leqslant_l (x'', y'')$. La relation $\leqslant_l$ est donc transitive.

Supposons que l'ordre $\leqslant$ est total et considérons deux éléments (x, y) et (x', y') de $E \times E$. Concernant x et x', nous avons trois cas : $x < x'$, $x = x'$ ou $x > x'$ puisque l'ordre $\leqslant$ est total. Dans le premier cas, on a $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ et, dans le troisième cas, on a $(x', y') \leqslant_l (x, y)$. Traitons le cas restant $x = x'$. Nous avons alors deux sous-cas : $y \leqslant y'$ ou bien $y' \leqslant y$, encore parce que $\leqslant$ est un ordre total. Dans le premier sous-cas $(x, y) \leqslant_l (x', y')$ et, dans le second, $(x', y') \leqslant_l (x, y)$. L'ordre $\leqslant_l$ est donc total. ■

Proposition 1.13. (Relation induite). *Soient E un ensemble ordonné par $\leqslant$ et F une partie de E. Alors la relation induite sur F (voir définition 1.3) par $\leqslant$ est une relation d'ordre sur F.*

II.3. Bornes et éléments extrémaux

Définition 1.14. (Minimum, maximum). *Soient E un ensemble ordonné et $a \in E$.*
1. On dit que a est un minimum de E (ou plus petit élément de E) lorsque, pour tout $x \in E$, on a $a \leqslant x$.
2. On dit que b est un maximum de E (ou plus grand élément de E) lorsque, pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant a$.

Remarque. Si E admet un minimum, alors il n'en admet qu'un seul. Il en est de même pour un maximum.

Définition 1.15. (Éléments minimaux, éléments maximaux). *Soient E un ensemble ordonné et $a \in E$.*
1. On dit que a est un élément minimal de E si le seul élément x de E vérifiant $x \leqslant a$ est $x = a$ lui-même.
2. On dit que a est un élément maximal de E si le seul élément x de E vérifiant $a \leqslant x$ est $x = a$ lui-même.

Remarque. Un ensemble ordonné E peut posséder plusieurs éléments minimaux (respectivement : éléments maximaux). Cependant, si E admet un minimum (respectivement : maximum) a, alors a est l'unique élément minimal (respectivement : élément maximal) de E.

Test 1.6.

L'ensemble $\mathbb{N}$ admet-il un minimum ? Un maximum ? Que dire de ses éléments minimaux, maximaux ?

Test 1.7.

Quels sont les éléments minimaux de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0,0)\}$ muni de l'ordre $\leqslant_p$? Même question pour l'ordre $\leqslant_l$.

Définition 1.16. (Minorants, majorants). *Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.*
1. On dit que $a \in E$ est un minorant de A dans E si $a \leqslant x$ pour tout $x \in A$.
2. On dit que $a \in E$ est un majorant de A dans E si $x \leqslant a$ pour tout $x \in A$.

Définition 1.17. (Borne inférieure, borne supérieure). *Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.*
1. On dit que $a \in E$ est une borne inférieure de A dans E si a est le plus grand minorant de A dans E. Si elle existe, cette borne inférieure est unique. On la note $\inf_E(A)$ ou $\inf(A)$.
2. On dit que $a \in E$ est une borne supérieure de A dans E si a est le plus petit majorant de A dans E. Si elle existe, cette borne supérieure est unique. On la note $\sup_E(A)$ ou $\sup(A)$.

II.4. Segments

Définition 1.18. (Segment). *On dit qu'une partie S d'un ensemble ordonné E est un segment (le nom complet est segment initial, mais dans ce chapitre et le suivant on adoptera la terminologie abrégée) s'il a la propriété suivante.*

$$\text{Pour tous } x, y \in E, \text{ on a l'implication } (x \in S \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow y \in S.$$

On notera parfois $\operatorname{Seg} E$ l'ensemble des segments de E. C'est une partie de $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 1.19. L'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ est un segment de $\mathbb{N}$. L'ensemble vide et $\mathbb{N}$ lui-même en sont aussi. La partie $\{0\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ est un segment de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour l'ordre lexicographique $\leqslant_l$. La partie $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leqslant 10, n \leqslant 20\}$ est un segment de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour l'ordre produit $\leqslant_p$.

Définition 1.20. (Segment ouvert, segment fermé). *Si E est un ensemble ordonné et $a \in E$, on définit le segment ouvert de a (nous dirons parfois simplement le segment de a) :*

$$\operatorname{seg} a = \operatorname{seg}_E a = \{x \in E \mid x < a\}.$$

On définit aussi le segment fermé de a :

$$\overline{\operatorname{seg}}\, a = \overline{\operatorname{seg}}_E\, a = \{x \in E \mid x \leqslant a\}.$$

Pour $a \in E$, les ensembles $\operatorname{seg} a$ et $\overline{\operatorname{seg}}\, a$ sont des segments de E (voir exercice 1.2).

Test 1.8.

Soit E un ensemble ordonné. Donner un exemple d'un élément de $\operatorname{Seg} E$ qui ne soit pas de la forme $\operatorname{seg} a$ (avec $a \in E$).

Test 1.9.

1. Montrer que $\{0\} \times \mathbb{N}$ est un segment de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour l'ordre lexicographique $\leqslant_l$.
2. En est-il de même de $\mathbb{N} \times \{0\}$?

II.5. Homomorphismes d'ensembles ordonnés

Définition 1.21. (Homomorphisme d'ensembles ordonnés). *Une application* $f : A \to B$ *telle que* $a \leqslant b$ *si et seulement si* $f(a) \leqslant f(b)$ *est appelée un homomorphisme d'ensembles ordonnés. Si* f *est en plus une bijection, alors on dit que c'est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Si* f *est un homomorphisme d'un ensemble ordonné dans lui-même (c'est-à-dire lorsque* $E = F$*), alors on dit que* f *est un endomorphisme d'ensemble ordonné. Un endomorphisme d'ensemble ordonné bijectif est appelé un automorphisme d'ensemble ordonné.*

Remarque. Bien noter le « si et seulement si » dans la définition d'un homomorphisme d'ensembles ordonnés.

Test 1.10.

Citer deux endomorphismes de l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$.

Test 1.11.

On considère quatre applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 1 - x$ et $f_4(x) = 1$. Soit $E = \{a, b\}$ et soit $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Montrer que les ensembles ordonnés $\mathscr{P}(E)$ (ordonné pour l'inclusion) et F (ordonné par la relation $\leqslant$ sur les fonctions) sont isomorphes.

Proposition 1.22. *Un homomorphisme d'ensembles ordonnés est toujours injectif.*

Preuve. Soit $f : E \to F$ un homomorphisme d'ensembles ordonnés. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a $f(x) \leqslant f(y)$ donc $x \leqslant y$. De même, $f(y) \leqslant f(x)$ donc $y \leqslant x$. Par l'antisymétrie de $\leqslant$, on obtient $x = y$. Donc, f est injectif. ■

Proposition 1.23. *Soit* E *un ensemble totalement ordonné par* $\leqslant$*. L'application*

$$\operatorname{seg} : \begin{cases} E \longrightarrow \operatorname{Seg} E \\ a \longmapsto \operatorname{seg} a \end{cases}$$

est un homomorphisme d'ensembles ordonnés ($\operatorname{Seg} E$ *est ordonné par l'inclusion* $\subset$*).*

Preuve. Si $a \leqslant b$ alors $\operatorname{seg} a \subset \operatorname{seg} b$ par transitivité de $\leqslant$. Inversement, si $\operatorname{seg} a \subset \operatorname{seg} b$ alors on ne peut avoir $a > b$ (car b appartiendrait à $\operatorname{seg} a$ mais pas à $\operatorname{seg} b$). Donc $a \leqslant b$ puisque l'ordre est total. On a montré que seg est un homomorphisme d'ensembles ordonnés. ■

Remarque. L'application seg est injective, en vertu de la proposition 1.22. Cependant le segment E n'appartient pas à l'image de l'application seg. Elle n'est donc pas surjective.

II.6. Bons ordres

Définition 1.24. (Bon ordre). *Soit* E *un ensemble ordonné par* $\leqslant$*. On dit que* $\leqslant$ *est un bon ordre (ou que* E *est bien ordonné) si toute partie non vide de* E *admet un minimum. De façon formelle,*

$$\forall A \subset E, \qquad A = \varnothing \quad \textit{ou} \quad \exists a \in A,\ \forall b \in A, a \leqslant b.$$

Proposition 1.25. *Si $\leqslant$ est un bon ordre sur un ensemble E alors E est totalement ordonné par $\leqslant$.*

Preuve. Pour $x, y \in E$, la partie $\{x, y\}$ est non vide, donc possède un plus petit élément. Si x est plus petit élément alors $x \leqslant y$. Sinon, c'est y et $y \leqslant x$. ■

Proposition 1.26. *Soient E un ensemble bien ordonné par $\leqslant$ et F une partie de E. Alors F est bien ordonné par l'ordre induit par $\leqslant$.*

Preuve. Soit A une partie non vide de F. C'est donc aussi une partie non vide de E. Elle admet donc un minimum. ■

Exemple 1.27. L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien ordonné par l'ordre usuel (voir [*Mathématiques L1*, Pearson], proposition 7.99). Par contre, $\mathbb{Z}$ ne l'est pas (car $\mathbb{Z}$ lui-même, par exemple, ne possède pas de minimum). L'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs n'est pas bien ordonné par $\leqslant$ car, par exemple, l'intervalle ouvert $]0, 1[$ ne possède pas de minimum.

Proposition 1.28. *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est bien ordonné pour l'ordre lexicographique.*

Preuve. Soit F une partie non vide de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } b \in \mathbb{N} \text{ tel que } (a, b) \in F\}.$$

C'est une partie de $\mathbb{N}$. Elle est non vide puisque F l'est. Donc, A admet un minimum a_0. Considérons alors

$$B = \{b \in \mathbb{N} \mid (a_0, b) \in F\}.$$

C'est encore une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet un minimum b_0. Montrons que (a_0, b_0) est un minimum de F. Pour $(a, b) \in F$, on a $a_0 \leqslant a$ puisque a_0 est un minimum de A. Si $a_0 < a$ alors on obtient bien l'inégalité $(a_0, b_0) \leqslant_l (a, b)$. Si $a_0 = a$ alors on voit que $b_0 \leqslant b$ parce que b_0 est un minimum de B. On obtient encore $(a_0, b_0) \leqslant_l (a, b)$. ■

Test 1.12.

Montrer que $\leqslant_p$ n'est pas un bon ordre sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Test 1.13.

Soit $E = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de l'ordre usuel (avec $n \leqslant \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que $\leqslant$ est un bon ordre sur E.

Proposition 1.29. *Si E est un ensemble bien ordonné, alors*

$$\operatorname{Seg} E = \{\operatorname{seg} a \mid a \in E\} \cup \{E\}.$$

Preuve. Il est facile de constater (voir exercice 1.2) que les parties de la forme $\operatorname{seg} a$ (avec $a \in E$) sont des segments de E et que E lui-même en est un. Il reste à montrer que ce sont les seuls.

Si S est un segment de E, distinct de E, alors son complémentaire $E \setminus S$ contient un élément minimal a. Si $b \in E$ vérifie $b < a$, alors $b \in S$ puisque a est minimal dans $E \setminus S$. Le cas contraire est $a \leqslant b$ (car E est bien ordonné, donc totalement ordonné). Dans ce cas, $b \notin S$ puisque S est un segment et que $a \notin S$. On a donc $S = \operatorname{seg} a$. ■

Théorème 1.30. *Soient E un ensemble bien ordonné et f un endomorphisme de E. Alors, pour tout $a \in E$, on a $a \leqslant f(a)$.*

Preuve. Posons $A = \{a \in E \mid f(a) < a\}$. Il s'agit de montrer que la partie A est vide. Supposons au contraire qu'elle est non vide. Alors, elle admet un élément minimum a_0. Posons $a_1 = f(a_0)$. Puisque $a_0 \in A$, on a $f(a_0) < a_0$, c'est-à-dire $a_1 < a_0$. Mais alors $a_1 \notin A$ par minimalité de a_0. On a donc $a_1 \leqslant f(a_1)$, c'est-à-dire $f(a_0) \leqslant f(a_1)$. Cela implique que f n'est pas un endomorphisme, contrairement à l'hypothèse. Donc A est vide. ■

Corollaire 1.31. *Si f est un automorphisme d'un ensemble bien ordonné E alors f est l'application identité.*

Preuve. L'application f^{-1} est aussi un automorphisme de E. Donc, en plus de l'inégalité $x \leqslant f(x)$, on a aussi $f(x) \leqslant f^{-1}(f(x)) = x$, pour tout $x \in E$. Donc $f(x) = x$ pour tout $x \in E$. ■

Corollaire 1.32. *Soient E, F deux ensembles bien ordonnés et f_1, f_2 deux isomorphismes de E sur F. Alors $f_1 = f_2$.*

Preuve. La composée $f_2^{-1} \circ f_1$ est un automorphisme de E, et $f_1 \circ f_2^{-1}$ est un automorphisme de F. Le corollaire précédent indique donc que f_2^{-1} est l'inverse de f_1, donc $f_2 = f_1$. ■

Théorème 1.33. (Principe de Zermelo[1]). *Sur tout ensemble, il existe un bon ordre.*

Preuve. Cela sera démontré au chapitre suivant (voir théorème 2.19). Plus précisément, on montrera que cet énoncé est équivalent à l'axiome du choix 2.14. ■

II.7. Récurrence transfinie

Proposition 1.34. *Soit E un ensemble bien ordonné. Si F est une partie de E vérifiant*

$$\operatorname{seg} t \subset F \quad \Longrightarrow \quad t \in F \qquad \textit{pour tout } t \in E,$$

alors $F = E$.

1. Ernst Zermelo, mathématicien allemand, 1871-1953.

Preuve. Supposons que $E \setminus F$ est non vide. Alors il contient un élément minimal x. Par minimalité de x, on a $y \in F$ pour tout $y < x$. Donc $\operatorname{seg} x \subset F$. D'après l'hypothèse, on a alors $x \in F$, ce qui contredit $x \in E \setminus F$. Donc $E \setminus F$ est vide. ■

Corollaire 1.35. *Soit E un ensemble bien ordonné pour $\leqslant$ et soit P une propriété s'appliquant aux éléments de E. Supposons que, pour tout $a \in E$, on ait*

$$\big(\forall x \in \operatorname{seg} a,\ P(x) \textit{ vraie}\big) \Longrightarrow P(a) \textit{ vraie.}$$

Alors la propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Preuve. Soit $F = \{x \in E \mid P(x) \text{ vraie}\}$. Le théorème précédent montre que $F = E$. ■

III. Exercices

1.1. ⋆⋆

Soit A un ensemble. Posons

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}.$$

Montrer que $B \notin A$.

1.2. ⋆

Soient E un ensemble ordonné et $a \in E$. Montrer que $\operatorname{seg} a$ et $\overline{\operatorname{seg}}\, a$ sont des éléments de $\operatorname{Seg} E$.

1.3. ⋆

Soit A un segment d'un ensemble ordonné E et soit B tel que $A \subset B \subset E$. Montrer que B est un ensemble ordonné et que A est un segment de B.

1.4. ⋆

Sur l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$, on définit la relation suivante notée $\leqslant$. On pose $x \leqslant y$ si et seulement si

$$x = y \text{ ou } (x, y) \in \{(a, c), (b, c), (d, e)\}.$$

C'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ? Quels sont les éléments minimaux ? Maximaux ?

1.5. ⋆⋆

On désigne par $0_1, 1_1, 2_1, \ldots$ et $0_2, 1_2, 2_2, \ldots$ des objets tous distincts et on pose $\mathbb{N}_1 = \{n_1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{N}_2 = \{n_2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. On désigne respectivement par $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$ les relations d'ordre naturelles sur $\mathbb{N}_1$ et $\mathbb{N}_2$. Sur $E = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, on définit la relation $\leqslant$ en posant $p \leqslant q$ dans les cas suivants.

a. $p \in \mathbb{N}_1$, $q \in \mathbb{N}_1$ et $p \leqslant_1 q$.

b. $p \in \mathbb{N}_1$, $q \in \mathbb{N}_2$.

c. $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}_2$ et $q \leqslant_2 p$.

1. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.

2. Montrer que $\mathbb{N}_2$ est minoré dans E mais n'admet pas de borne inférieure.

1.6. ⋆⋆

Soient X et Y deux ensembles ordonnés et $f : X \to Y$ un homomorphisme surjectif. Montrer que si A est une partie de X admettant une borne supérieure $\sup A$ alors $f(\sup A) = \sup f(A)$.

1.7. ⋆

Soit E un ensemble ordonné. Montrer que l'application $\overline{\operatorname{seg}} : a \mapsto \overline{\operatorname{seg}}\, a$ est un homomorphisme d'ensembles ordonnés de E dans $\operatorname{Seg} E$.

1.8. ⋆⋆

Quels sont les automorphismes de l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$? Ceux de $\mathbb{Z}$?

1.9. ⋆⋆

Soit F un ensemble bien ordonné. On pose $E = F \cup \{\infty\}$ et on munit E d'une relation d'ordre en prolongeant celle de F et en posant $x \leqslant \infty$ pour tout $x \in E$. Montrer que E est bien ordonné.

1.10. $\omega + \omega$ ⋆⋆

Soient E_1 et E_2 deux ensembles disjoints bien ordonnés respectivement par $\leqslant_1$ et $\leqslant_2$. Sur

$E = E_1 \cup E_2$, on définit la relation $\leqslant$ en posant $p \leqslant q$ dans les cas suivants.

a. $p \in E_1$, $q \in E_1$ et $p \leqslant_1 q$.

b. $p \in E_1$, $q \in E_2$.

c. $p \in E_2$, $q \in E_2$ et $p \leqslant_2 q$.

1. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.

2. Montrer que $\leqslant$ est un bon ordre.

1.11. ⋆⋆

Montrer qu'un ensemble totalement ordonné E est bien ordonné si et seulement s'il n'existe aucune suite infinie strictement décroissante dans E.

1.12. ⋆⋆

Soient E un ensemble bien ordonné et f un endomorphisme de E. Montrer par récurrence transfinie que $x \leqslant f(x)$, pour tout $x \in E$.

1.13. ⋆⋆⋆

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$. Pour $f \in E$, on désigne par f_i le coefficient de X^i dans f. Pour $f, g \in E$, on pose $f \leqslant g$ lorsque $f = g$ ou s'il existe i tel que $f_i < g_i$ et $f_j = g_j$ pour tout $j > i$.

1. Montrer que si $\deg f < \deg g$, alors $f < g$.

2. Montrer que la relation obtenue est un bon ordre sur E.

1.14. ⋆⋆

Reprenons les notations de l'exercice précédent. Pour $f, g \in E$, on pose $f \leqslant' g$ lorsque $f = g$ ou s'il existe i tel que $f_i < g_i$ et $f_j = g_j$ lorsque $0 \leqslant j < i$. La relation $\leqslant'$ est-elle un bon ordre sur E ?