Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

Nous présentons un jeu appelé « le jeu de Saint-Pétersbourg » avec l'objectif de nous permettre de comprendre notre comportement face au risque. Ce jeu nous conduit à appréhender le paradoxe existant entre la rationalité dont on se réclame et l'émotivité avec laquelle on agit.

Ce jeu fut présenté par Nicolas Bernoulli en 1713 à Saint-Pétersbourg, raison pour laquelle ce jeu est connu sous le nom de « paradoxe de Saint-Pétersbourg ». C'est en 1738, soit 25 ans plus tard, que Daniel Bernoulli en proposa une solution.

Admettons qu'il vous soit proposé le jeu consistant à lancer une pièce de monnaie non pipée autant de fois que cette dernière tombe sur face. Ce jeu peut se poursuivre indéfiniment tant que face apparaît. Si, pour la première fois, la pièce tombe sur pile au n -ième lancer, le jeu s'arrête et vous recevez un montant égal à 2^{n-1} €.

À l'examen de ce jeu, il est évident que le montant que vous pouvez gagner est soit nul si la pièce tombe au premier lancer sur pile, soit positif si la pièce tombe sur pile au n -ième lancer. Il est donc naturel que la personne qui vous propose ce jeu vous demande une contribution ou une mise de départ, de manière certaine, pour qu'elle accepte également de participer au jeu.

Le problème devant lequel vous vous trouvez est d'évaluer l'espérance de gain de ce jeu et de miser un montant qui rend ce jeu économiquement équilibré entre vous-même et la personne qui vous le propose.

- Si la pièce tombe sur face au premier lancer, vous gagnez 2 €.
- Si la pièce tombe consécutivement sur face au deuxième lancer, vous gagnez 2² €.
- Si la pièce tombe consécutivement sur face au troisième lancer, vous gagnez 2³ €.
- ...

À titre d'exemple, si la pièce tombe, pour la première fois, sur pile au 21^e lancer, vous gagnez 2²⁰ €, soit un montant de 1 048 576 €.

Il faut se rappeler que, tant que la pièce tombe sur face, le jeu se poursuit. On comprend immédiatement que le gain possible lorsque vous participez à ce jeu peut être gigantesque.

1. Combien êtes-vous prêt à miser pour participer à ce jeu ?

Pour répondre à cette question, l'homme rationnel calculera l'espérance mathématique de gain de ce jeu et misera, pour avoir accès à ce jeu, la valeur de l'espérance de gain afin que le jeu soit économiquement équilibré pour les deux parties.

Calculons donc cette espérance mathématique de gain. Si on désigne par x la valeur de la variable aléatoire « nombre de faces » et par D_x son domaine de définition, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\text{gain}) &= \sum_{D_x} x \cdot \text{Prob}(X=x) \\ &= \frac{1}{2} 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 2^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n + \dots \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty \end{aligned}$$

L'espérance de gain de ce jeu est infinie. En d'autres termes, un individu rationnel devrait être disposé à miser la totalité de sa fortune pour pouvoir jouer à ce jeu.

Le *paradoxe* consiste donc à constater que la mise de départ, généralement proposée pour jouer à ce jeu, est de quelques euros. Quand bien même un individu accepterait de miser la totalité de sa fortune, son opposant ne devrait pas rationnellement accepter cette fortune comme mise de départ parce que, dans ces conditions, le jeu serait en sa défaveur, déséquilibré économiquement. En effet, le montant de la fortune du joueur est nécessairement inférieur à l'infini.

C'est en 1738, à la suite d'un article de Gabriel Cramer paru dans les *Commentaires de Saint-Petersbourg*, que ce problème va acquérir le surnom de « *paradoxe de Saint-Petersbourg* ».

En fait, à l'analyse, on note que le concept d'espérance mathématique, généralement perçu comme un paramètre de position, ne peut plus être considéré comme tel lorsque ce paramètre est infini. Dans ce cas bien précis, l'espérance ne joue plus le rôle de valeur centrale. Cela parut paradoxal à l'époque. Il faut ajouter que la variance du gain est également infinie. En effet :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\text{gain}) &= \sum_{D_x} (x - E(x))^2 \cdot \text{Prob}(X=x) \\ &= (2 - \infty)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2^2 - \infty)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots = \infty \end{aligned}$$

2. Mais comment donc résoudre ce paradoxe ?

Comment, en effet, peut-on expliquer qu'un individu auquel un jeu d'espérance infinie de gain est proposé n'accepte de miser que quelques euros pour y participer ?

Pour résoudre ce paradoxe, Daniel Bernoulli a introduit en 1738 la notion de fonction d'utilité de la richesse. En fait, selon son auteur, on a une propension à considérer la richesse par l'évaluation « subjective » de l'utilité qu'elle nous confère et non pas en tant que valeur absolue. En d'autres mots, on relativise l'importance de la valeur monétaire.

La résolution, ou plus exactement une des diverses solutions apportées à ce paradoxe, fut la contribution de Daniel Bernoulli par la substitution d'une fonction d'utilité logarithmique à la valeur monétaire de la variable aléatoire.

Si on accepte l'idée que toute somme d'argent est nécessairement convertie dans notre inconscient en termes d'utilité, on peut recalculer pour le jeu de Saint-Petersbourg non plus l'espérance de gain, mais plus précisément l'espérance de l'utilité du gain, notée $E(U(x))$ ou $E(U(\text{gain}))$.

Si on adopte une fonction d'utilité logarithmique, on obtient :

$$\begin{aligned}
 E[U(\textit{gain})] &= \frac{1}{2}U(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 U(2^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 U(2^3) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n U(2^n) + \dots \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln(2^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ln(2^3) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2^n) + \dots \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 2 \cdot \ln(2) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n n \cdot \ln(2) + \dots \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2) \left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots \right] \\
 E[U(\textit{gain})] &= \frac{1}{2}\ln(2) \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \tag{12.57}
 \end{aligned}$$

Calculons la valeur de l'expression $\left[\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$ contenue dans l'équation (12.57).

Considérons la somme $S(x)$ de la série suivante : $S(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Cette série est la limite, quand n tend vers l'infini, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme égal à 1. Dès lors :

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{si} \quad -1 < x < +1$$

Prenons la dérivée de $S(x)$, soit :

$$S'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 S'\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + 2\frac{1}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots \\
 S'\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4 \tag{12.58}
 \end{aligned}$$

Remplaçons, dans l'équation (12.57), $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ par sa valeur tirée de l'expression (12.58). L'espérance de l'utilité de gain devient :

$$E[U(\text{gain})] = \frac{1}{2} \text{Ln}(2) \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \right] = \frac{1}{2} \text{Ln}(2) \cdot 4 = 2 \text{Ln}(2) = \text{Ln}(2^2) = \text{Ln}(4)$$

Cela revient à dire que participer à ce jeu équivaut à détenir 4 €. L'espérance de l'utilité du gain est de $\text{Ln}(4) = 1,3863$ €. En d'autres termes, la participation à ce jeu procure la même utilité que la détention certaine de 4 €.

Annexe 2

Démonstration de la relation 12.19

Partons de la relation (12.16) :

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{E_p - E_2}{E_1 - E_2} \right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2 \left(\frac{E_p - E_2}{E_1 - E_2} \right) (\sigma_{12} - \sigma_2^2) + \sigma_2^2$$

On va simplement réaménager l'équation ci-dessus afin de toiletter la relation entre σ_p et E_p :

$$\sigma_p^2 (E_1 - E_2)^2 = (E_p - E_2)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2(E_p - E_2)(E_1 - E_2)(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2$$

Posons :

$$\begin{cases} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) = A \\ (\sigma_{12} - \sigma_2^2) = B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 (E_1 - E_2)^2 &= (E_p - E_2)^2 A + 2(E_p - E_2)(E_1 - E_2)B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 \\ &= (E_p^2 - 2E_p E_2 + E_2^2) A + 2(E_p E_1 - E_p E_2 - E_2 E_1 + E_2^2) B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 \\ &= (E_p^2 A - 2E_p E_2 A + E_2^2 A) + 2(E_p E_1 - E_p E_2) B - 2(E_2 E_1 - E_2^2) B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 \\ &= (E_p^2 A - 2E_p E_2 A + E_2^2 A) + 2(E_p E_1 - E_p E_2) B - 2(E_2 E_1 - E_2^2) B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 \\ &= E_p^2 A + 2E_p (E_1 - E_2) B - 2E_p E_2 A + E_2^2 A - 2(E_2 E_1 - E_2^2) B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} E_2^2 A - 2(E_2 E_1 - E_2^2) B + (E_1 - E_2)^2 \sigma_2^2 &= C \\ \sigma_p^2 (E_1 - E_2)^2 &= E_p^2 A + 2E_p [(E_1 - E_2) B - E_2 A] + C \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} [(E_1 - E_2) B - E_2 A] &= D \\ \sigma_p^2 (E_1 - E_2)^2 &= E_p^2 A + 2E_p D + C \end{aligned} \tag{12.59}$$

Développons les valeurs de A , D et C et explicitons σ_p^2 . On sait que :

$$\begin{cases} A = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) \\ B = (\sigma_{12} - \sigma_2^2) \end{cases}$$

Donc D devient :

$$\begin{aligned}
 D &= \left[(E_1 - E_2)(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - E_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) \right] \\
 &= E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - E_2(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - E_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) \\
 &= E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - E_2 \left[(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) \right] \\
 &= E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - E_2(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) \\
 D &= E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2)
 \end{aligned} \tag{12.60}$$

et C devient :

$$\begin{aligned}
 C &= E_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) - 2(E_2E_1 - E_2^2)(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + (E_1 - E_2)^2\sigma_2^2 \\
 &= E_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) - 2 \left[(E_2E_1\sigma_{12} - E_2^2\sigma_{12} - E_2E_1\sigma_2^2 + E_2^2\sigma_2^2) \right] + (E_1^2\sigma_2^2 - 2E_1E_2\sigma_2^2 + E_2^2\sigma_2^2) \\
 &= E_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) - 2 \left[(E_2E_1\sigma_{12} - E_2^2\sigma_{12} - E_2E_1\sigma_2^2 + E_2^2\sigma_2^2) \right] + (E_1^2\sigma_2^2 - 2E_1E_2\sigma_2^2 + E_2^2\sigma_2^2) \\
 &= E_2^2\sigma_1^2 + E_2^2\sigma_2^2 - 2E_2^2\sigma_{12} - 2E_2E_1\sigma_{12} + 2E_2^2\sigma_{12} + 2E_2E_1\sigma_2^2 - 2E_2^2\sigma_2^2 + E_1^2\sigma_2^2 - 2E_1E_2\sigma_2^2 + E_2^2\sigma_2^2 \\
 C &= E_2^2\sigma_1^2 - 2E_2E_1\sigma_{12} + E_1^2\sigma_2^2
 \end{aligned} \tag{12.61}$$

Reprenons l'équation (12.59) et remplaçons A , D et C par leur valeur. On a :

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2(E_1 - E_2)^2 &= E_p^2A + 2E_pD + C \\
 \sigma_p^2(E_1 - E_2)^2 &= E_p^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + 2E_p \left[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2) \right] + E_2^2\sigma_1^2 - 2E_2E_1\sigma_{12} + E_1^2\sigma_2^2 \\
 \sigma_p^2 &= E_p^2 \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{(E_1 - E_2)^2} + 2E_p \frac{\left[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2) \right]}{(E_1 - E_2)^2} + \frac{E_2^2\sigma_1^2 - 2E_2E_1\sigma_{12} + E_1^2\sigma_2^2}{(E_1 - E_2)^2}
 \end{aligned} \tag{12.62}$$

On est en présence de l'équation d'une hyperbole dans l'espace $(E_p ; \sigma_p)$.

Posons :

$$\left\{ \begin{aligned}
 G &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})}{(E_1 - E_2)^2} \\
 H &= 2 \frac{\left[E_1(\sigma_{12} - \sigma_2^2) + E_2(\sigma_{12} - \sigma_1^2) \right]}{(E_1 - E_2)^2} \\
 I &= \frac{E_2^2\sigma_1^2 - 2E_2E_1\sigma_{12} + E_1^2\sigma_2^2}{(E_1 - E_2)^2}
 \end{aligned} \right.$$

L'équation (12.62) devient :

$$\sigma_p^2 = G \cdot E_p^2 + H \cdot E_p + I$$